Mathematik II für Informatiker
Script zur Vorlesung SS2006 bei Prof. Dr. Schmidt

Martin Heinzerling - mnhg@bashcomp.de
Alexander Lemke - alexander.lemke@inf.tu-dresden.de

15. Juli 2006
Technische Universität Dresden

Zusammenfassung

Das hier Angebote Material ist kein Orginalmaterial des Professors. Es wurde nach besten Wissen und Gewissen durch meine Person zusammengestellt. Aus offensichtlichen Gründen kann ich aber dennoch keine Garantie auf Vollständigkeit oder Korrektheit geben. Die Verwendung erfolgt auf eigene Gefahr.
Das Script darf ausschließlich privat genutzt werden. Öffentliche Präsentationen außerhalb dieses Studiengangs an der TUD sind strikt untersagt. Zuwiderhandlung werden zur Anzeige gebracht.

Weisheiten

„Das ist so elegant formuliert, dass man manchmal gar nicht mehr weiß, was es bedeutet.“
04.05.2006
„... man darf nicht nachdenken, sondern muss nur alles richtig machen.“
16.06.2006
„Ich traue dem Bild mehr als der Definition.“
22.06.2006
„Die Beschränktheit unserer Handlung macht das Leben leicht.“
30.06.2006
„Determinate: Unschön, hässlich und trotzdem griffig.“
06.07.2006
„Das gesamte Messen im n-dimentionalem Raum beruht auf der CSU“
14.07.2006

Das Wort zum Sonntag, oder zum Ende..

Dies ist das letzte Update von mir. Und damit ist das Semester auch durch. Ich wünschen allen die meine Abschrift benutzen, und allen anderen natürlich auch, viel Glück bei der Prüfung. Ich möchte auch denen Danken die wenigsten Ab und Zu mal ein Feedback gesendet und Fehler gemeldet haben. Ein besonderer Dank gilt hier natürlich auch Alex der sich durch meine Mitschriften gekämpft hat und hoffentlich die meisten Fehler beim Korrekturlesen gefunden hat. Das Script wird in dieser Form auch weiter unter tud.bashcomp.de erreichbar bleiben.

Martin

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen

1.1 Beispiel: „Familien-Matrix“

	Alter in a	Größe in cm	Gewicht in kg
Gerta	28	160	55
Franz	37	199	132
Tanja	8	135	39

Formalisierung

Personenmenge $P = \{Gerta, Franz, Tanja\}$
Eigenschaftsmenge $E = \{Alter, Größe, Gewicht\}$

Familien-Matrix als Abbildung

$A : P \times E \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{lll} (Gerta, Alter) \mapsto 28, & (Gerta, Größe) \mapsto 55, & (Gerta, Gewicht) \mapsto 160 \\ (Franz, Alter) \mapsto 37, & (Franz, Größe) \mapsto 199, & (Franz, Gewicht) \mapsto 132 \\ (Tanja, Alter) \mapsto 8, & (Tanja, Größe) \mapsto 135, & (Tanja, Gewicht) \mapsto 39 \end{array}$$

Abstraktion

Sei $p : P \to \{1, 2, 3\}$ erklärt durch $Gerta \mapsto 1$, $Franz \mapsto 2$, $Tanja \mapsto 3$.
Äquivalent dazu definieren wir $e : E \to \{1, 2, 3\}$ mit $Alter \mapsto 1$, $Größe \mapsto 2$, $Gewicht \mapsto 3$.
Sei weiterhin $a : \{1, 2, 3\}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $a_{ij} := a(i, j)$ und

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 28, & a_{12} = 160, & a_{13} = 55 \\ a_{21} = 37, & a_{22} = 199, & a_{23} = 132 \\ a_{31} = 8, & a_{32} = 135, & a_{33} = 39 \end{array}$$

Als Schema erhält man so:

	1	2	3
1	28	160	55
2	37	199	132
3	8	135	39

$\Rightarrow$ Es gilt also $A(x, y) = a_{p(x),e(y)}$ für alle $x \in P$ und $y \in E$.

1.2 Definition: „(Allgemeine) Matrizen“

Verallgemeinerung

Seien P, E nichtleere endliche Mengen und sei $\mathbb{K}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ mit $p = Primzahl$).
Eine Abbildung $A : P \times E \to \mathbb{K}$ heißt $\mathbb{K}$–wertige Matrix.
Für $x \in P$ und $y \in E$ heißen

$$\begin{aligned} &A(x, \bullet) : E \to K, t \mapsto A(x,t) \text{ die } x\text{–te Zeile} \\ &A(\bullet, y) : P \to K, s \mapsto A(s,y) \text{ die } y\text{–te Spalte} \end{aligned}$$

der Matrix A.

Sind $P = \{1, \dots, m\}$ und $E = \{1, \dots, n\}$ so setzen wir $A =: (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und erhalten für A folgendes Schema:

$$A = \begin{array}{c|c|c} 1 \;\; \dots & j & \dots \;\; n \\ \vdots & & \\ \hline i & A_{ij} & \\ \hline \vdots & & \\ m & & \end{array}$$

Die i–te Zeile von A ist dann $A(i, \bullet) =: (A_{ij})_{j=1,\dots,n} = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ und wird auch als Zeilen-Vektor bezeichnet.
Die j–te Spalte von A ist dann $A(\bullet, j) =: (A_{ij})_{i=1,\dots,m} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$ und heißt Spaltenvektor.
In unserem Beispiel ist die „Tanja-Zeile“:
$A(Tanja, \bullet) : E \to \mathbb{R}$ mit $Alter \mapsto 8, Größe \mapsto 135, Gewicht \mapsto 31$
In abstrakter Form „3-te Zeile“

	1	2	3
1			
2			
3	8	135	39

und die „Gewichts-Spalte“:
$A(\bullet, Gewicht) : P \to \mathbb{R}$ mit $Gerta \mapsto 55, Franz \mapsto 132, Tanja \mapsto 39$
In abstrakter Form „3-te Spalte“

	1	2	3
1			55
2			132
3			39

1.3 Definition: „Matrizen-Multiplikation“

Seien P, E, D nichtleere endliche Mengen. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A : P \times E \to \mathbb{K}$ und $B : E \times D \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$–wertig Matrizen.
Dann ist das Matrizenprodukt von A mit B erklärt als

$$A \cdot B : P \times D \to \mathbb{K} \quad (x,z) \mapsto \sum_{y \in E} A(x,y) \cdot B(y,z)$$

Spezialfall

$$P = \{1, \ldots, m\},\ E = \{1, \ldots, l\},\ D = \{1, \ldots, n\}$$

Hier folgt aus $A = (A_{ih})_{\substack{i=1,\ldots,m\\h=1,\ldots,l}}$, $B = (B_{hj})_{\substack{h=1,\ldots,l\\j=1,\ldots,n}}$ und $A \cdot B = ((A \cdot B)_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\j=1,\ldots,n}}$ schließlich

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^{l} A_{ih} B_{hj} = A_{i1} B_{1j} + \ldots + A_{il} B_{lj}$$

Dies entspricht salopp formuliert der i–ten Zeile „mal“ der j-ten Spalte.

1.4 Beispiel: „Formaler Kontext als 0–1–Matrix“

$$\begin{array}{c|cccc} & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \hline g_1 & \times & & \times & \times \\ g_2 & \times & \times & \times & \\ g_3 & & & \times & \times \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Inzidenzmatrix}$$

Man berechne mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Transponierte\ Matrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die gemeinsame Merkmale.

1.5 Definition: „Matrizen-Transposition“

Seien wie gehabt P, E nichtleere endliche Mengen und $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist die *Transponierte* einer Matrix $A : P \times E \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$A^T : E \times P \to \mathbb{K}, (y, x) \mapsto A(x, y)$$

A^T wird auch als Transpositions-Matrix von A bezeichnet.

Anmerkung: Es ist $A^T(y, x) = A(x, y)$ für alle $x \in P$ und $y \in E$
Es gilt weiterhn $(A^T)^T = A$
Im Spezialfall $P = \{1, \ldots, m\}$ und $E = \{1, \ldots, n\}$
gilt $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

D.h. es ist $((A_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\j=1,\ldots,n}})^T = (A_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,n\\i=1,\ldots,m}}$

als Schema: $\begin{array}{ccc} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{ccc} A_{11} & \ldots & A_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{mn} \end{array}$

1.6 Proposition: „Transponiertes Matrizenprodukt“

Seien P, E, D nichtleere endliche Mengen und sei $\mathbb{K}$ ein Körper.
Dann gilt für Matrizen $A : P \times E \to \mathbb{K}$ und $B : E \times D \to \mathbb{K}$ stets

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Beweis

Der Beweis ist recht einfach zu führen:
Für beliebige $z \in D$ und $x \in P$ ist

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)^T(z,x) &\underbrace{=}_{\text{Def.}} (A \cdot B)(x,z) \\
&\underbrace{=}_{\text{Def.}} \sum_{y \in E} A(x,y) \cdot B(y,z) \\
&= \sum_{y \in E} \underbrace{B(y,z)}_{B^T(z,y)} \cdot \underbrace{A(x,y)}_{A^T(y,x)} \\
&= \sum_{y \in E} B^T(z,y) \cdot A^T(y,x) \\
&= (B^T \cdot A^T)(z,x)
\end{aligned}$$

qed

1.7 Beispiel: „Aufenthaltswahrscheinlichkeit“

Seien p_1, p_2, p_3 drei Personen, die sich unabhängig von einander an den vier Orten e_1, e_2, e_3, e_4 mit folgenden Wahrscheinlichkeiten aufhalten.

$$A := \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline p_1 & 50 & 20 & 10 & 20 \\ p_2 & 30 & 40 & 20 & 10 \\ p_3 & 10 & 60 & 10 & 20 \end{array} \text{ in Prozent}$$

Wir berechnen $A \cdot A^T$:

$$\begin{pmatrix} 0.50 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.40 & 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.10 \\ 0.20 & 0.40 & 0.60 \\ 0.10 & 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.27 & 0.22 \\ 0.27 & 0.30 & 0.31 \\ 0.22 & 0.31 & 0.42 \end{pmatrix}$$

und erhalten, dass p_1 und p_2 sich mit 27%, p_2 und p_3 sich mit 31% und p_1 und p_3 sich mit 22% Wahrscheinlichkeit treffen. (Für die Diagonalen geben wir keine Interpretation.)

1.8 Beispiel: „Anzahl von Wegen“

Seien $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ mit insgesamt neun verschiedenen Punkten (in der Ebene).

Folgende gerichtete Wege sollen zwischen den obigen Punkten existieren:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & e_1 & & & \\
p_1 & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & d_1 \\
 & & \searrow & e_2 & \searrow & & \\
p_2 & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & d_2 \\
 & & \searrow & e_3 & \searrow & & \\
p_3 & \circ & \rightarrow & \circ & \rightarrow & \circ & d_3
\end{array}$$

Die Wege von P über E nach D sind dann in folgender Weise beschrieben.

$$A := \begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ p_1 & 1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & 1 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B := \begin{array}{cccc} & d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir brechnen $A \cdot B$ und erhalten somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Anzahl der Wege zwischen zwei Punkten.

Wie bestimmt sich nun die Anzahl für alle Rückwege von D über E nach P?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & e_1 & & & \\ p_1 & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & d_1 \\ & & \nwarrow & e_2 & \nwarrow & & \\ p_2 & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & d_2 \\ & & \nwarrow & e_3 & \nwarrow & & \\ p_3 & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & d_3 \end{array}$$

Die Wege von D über E nach P sind dann in folgender Weise beschrieben.

$$B^T := \begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ d_1 & 1 & 0 & 0 \\ d_2 & 1 & 1 & 0 \\ d_3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A^T := \begin{array}{cccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wir berechnen mit Propostion 1.6:

$$B^T \cdot A^T = (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten hierdurch die Anzahlen aller Wege von jedem d_j zu jedem d_i ganz einfach durch die Transspositions-Matrix von $A \cdot B$.

Kapitel 2

Vektorräume

2.1 Definiton: „Vektoren als Matrizen“

Seien P, E nichtleere endliche Mengen und $\mathbb{K}$ ein Körper.

Eine Matrix $A : P \times E \to \mathbb{K}$ heißt: Zeilenvektor, falls P einelementig ist;
Spaltenvektor, falls E einelementig ist.

Im Falle $P = \{1\}$ und $E = \{1, \ldots, n\}$ nennen wir A eine $1 \times n$–Matrix: $A : A_{11}, \ldots, A_{1n}$.
Analog dazu mit $E = \{1\}$ und $P = \{1, \ldots, m\}$ nennen wir A eine $m \times 1$–Matrix.

Anmerkung zur Def.: “Identifikation“

Ist A eine $P \times E$–Matrix über $\mathbb{K}$, so identifizieren wir für $x \in P$ und $y \in E$

1. die Zeile $A(x, \bullet)$ mit der “Einschränkung“ von A auf $\{x\} \times E$ d.h. mit dem Zeilenvektor

$$A_x : \{x\} \times E \to K, (x,t) \mapsto A(x,t)$$

und

2. die Spalte $A(\bullet, y)$ mit der “Einschränkung“ von A auf $P \times \{y\}$ d.h. mit dem Spaltenvektor

$$A^y : P \times \{y\} \to K, (s,y) \mapsto A(s,y)$$

3. In ähnlicher Weise können wir die Menge K^E mit der Menge $K^{\{x\}\times E}$ identifiziert, indem wir jede Abbildung $g : E \to K$ mit der Abbildug $g_x : \{x\} \times E \to K, (x,t) \mapsto g(t)$ identifizieren, d.h. „x wird nicht berücksichtigt“.
Entsprechend identifizieren wir K^P mit $K^{P\times\{y\}}$, indem wir jede Abbildung $f : P \to K$ mit der Abbildung $f^y : P \times \{y\} \to K, (s,y) \mapsto f(s)$ identifizieren, d.h. „y wird nicht berücksichtigt“.

2.2 Definition: „Verktorraum von Abbildungen“

Seien S eine nichtleere Menge und $\mathbb{K} = (K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper.
Dann ist auf der Menge K^S also der Menge aller Abb. von $S \to K$, die Operationen „Addition“, “skalare Multiplikation“ und „Nullabbbildung eingeführt.

1. „Addition“: Für $f, g \in K^S$ sei stets $f + g : S \to K, x \mapsto f(x) + g(x)$

2. „Skalare Multiplikation“: Für $\lambda \in K$ sei $\underline{\lambda} : K^S \to K^S, f \mapsto \lambda \cdot f$ durch $\lambda \cdot f : S \to K, x \mapsto \lambda \cdot f(x)$

3. „Nullabbildung“: Es sei $0_S : S \to K, x \mapsto 0$.

Die Struktur

$$\mathbb{K}^S := (K^S, +, 0_S, (\underline{\lambda})_{\lambda\in\mathbb{K}})$$

heiße Vektorraum der Abbildung von S nach $\mathbb{K}$.
Im Falle $S = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir auch $\mathbb{K}^n$ anstatt $\mathbb{K}^S$.

„Addition“: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1 \dots, \mu_n) := (\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)$

„Scalare Multiplikation“: $\lambda \cdot (\mu_1 \dots, \mu_n) := (\lambda \cdot \mu_1, \dots, \lambda \cdot \mu_n)$

„Nullabbildung ≡ Nullvektor“ $\vec{0} := \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-stellig}$

2.3 Beispiel und Defintion: „Vektorraum von Matrizen“

Seien P, E nichtleere endliche Mengen und sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

1. Dann ist $\mathbb{K}^{P\times E}$ der Vektorraum der $P \times E$–Matrizen über $\mathbb{K}$ und wir setzen $M_{P,E}(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{P\times E}$

2. Im Falle $P = \{1, \dots, m\}$ und $E = \{1, \dots, n\}$ setzen wir $M_{m,n}(\mathbb{K}) := M_{P,E}(\mathbb{K})$ und sprechen vom Vektorraum der $m \times n$ - Matrix über $\mathbb{K}$.

   „Addition“: $(A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}} + (B_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}} := (A_{ij} + B_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$

   d.h. $\boxed{\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{matrix}} := \boxed{\begin{matrix} A_{11}+B_{11} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & \dots & A_{mn}+B_{mn} \end{matrix}}$

   „Skalare Multiplikation“: $\lambda \cdot (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}} := (\lambda \cdot A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$

   d.h. $\lambda \cdot \boxed{\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{matrix}} := \boxed{\begin{matrix} \lambda\cdot A_{11} & \dots & \lambda\cdot A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot A_{m1} & \dots & \lambda\cdot A_{mn} \end{matrix}}$

   „<u>Nullmatrix</u>-Nullvektor“: $\vec{0} := (0, \dots, 0)$

   d.h. $0 := \boxed{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}$

3. Der Vektorraum der $P \times P$–Matrizen über $\mathbb{K}$ bildet zusammen mit der Matrizenmultiplikation und der Einheitsmatrix $I_P : P \times P \to K, (x, y) \mapsto \delta_{x,y}$ (wobei $\delta_{x,y} := 1$ und $\delta_{x,y} := 0$ für $x \neq y$) die sogenante Matrizen-Algebra $M_p(\mathbb{K})$. Im Falle $P = \{1, \dots, n\}$ nennen wir $M_n(\mathbb{K}) := M_P(\mathbb{K})$ auch die Algebra der $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{K}$, die Einheitmatrix.

   $I_n := I_p$ ist dann
   $$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & \dots & \dots & n \\ \hline 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

   Die Struktur $(K^{P\times P}, +, \cdot, 0_P, 1_P)$ $[0_p := 0_{p\times p}]$ bildet einen Ring, den sogenanten Matrizenring über $\mathbb{K}$.

2.4 Definition: „Vektorraum abstrakt“

Ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K} = (K, +, \cdot, 0, 1)$ ist erklärt als Tuppel $\mathbb{V} = (V, +, 0, (\underline{\lambda}|\lambda \in K))$ bestehent aus einer abelschen Gruppe $(V, +, 0)$ von sogenannten „Vektoren“ und einer einstelligen Operationen $\underline{\lambda} : V \to V, v \mapsto \lambda v \; \forall \lambda \in K$, der „skalaren Multiplikation“ mit folgenden Eigenschaften:

- $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \; \forall \lambda, \mu \in K$ und $v \in V$
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \; \forall \lambda \in K$ und $v, u \in V$
- $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \; \forall \lambda, \mu \in K$ und $v \in V$
- $1 \cdot v = v \; \forall v \in V$

Anmerkung

1. Genau genommen heißt der hier eingeführte Vektorraum $\mathbb{V}$ Links-Vektorraum. Rechts-Vektorräume haben die definierte Eigenschaft „skalare Multiplikation“, die „von Rechts“ wirkt. D.h. $\underline{\lambda} : V \to V, v \mapsto v\lambda$ und entsprechend $(v\lambda)\mu = v(\lambda\mu), (u+v)\lambda = u\lambda + v\lambda, v(\lambda + \mu) = v\lambda + v\mu$ und $v1 = v$ gilt.

2. Die „Familie“ $(\underline{\lambda}|\lambda \in K) = (\underline{\lambda})_{\lambda \in K}$ von skalaren Multiplikationen ist präzise formuliert, diejenige Abbildung von K nach V^V, die jedem $\lambda \in K$ die skalare Multiplikation $\underline{\lambda}$ zugeordnet.

3. Die zuvor eingeführten Vektorräume $\mathbb{K}^S$ von Abbildungen (bzw. $\mathbb{K}^{P \times E}$ von Matrizen) sind in der Tat Vektorräume gemäß der eben gegebenen Definition!

4. Ist $\mathbb{V}$ ein Vektorraum und S eine nichtleere Menge, so bildet die Menge der Abbildungen von S nach V in naheliegender Weise einen Vektorraum $\mathbb{V}^S$ („Additon“: $f + g : S \to V, x \mapsto f(x) + g(x)$ für alle $f, g \in V^S$; “Skalare Multiplikation“: $\underline{\lambda} : V^S \to V^S, f \mapsto \lambda f$, $\lambda f : S \to V, x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ für jedes $\lambda \in K$ und „Nullelement“: $0_S : S \to V, x \mapsto 0$)

5. Für nichtleere endlichen Mengen P, E und einen Vektorraum $\mathbb{V}$ nennen wir die Elemente des Vektorraums $\mathbb{V}^{P \times E}$ vektorwertige Matrix, oder kurz „Vektormatrix“.

6. In Analogie zu Früheren führen wir folgende „Faltungsprodukte“ für Vektormatrizen ein (P, E, D sind endliche nichtleere Mengen und $\mathbb{V}$ sei ein Vektorraum.):
   $K^{P \times E} \times V^{E \times D} \to V^{P \times D}, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ definiert durch $(\lambda \cdot v)(x, z) := \sum\limits_{y \in E} \lambda(x, y) \cdot v(y, z) \in V$

   $$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{ml} \end{matrix}}}_{\in K^{m \times l}} \cdot \underbrace{\boxed{\begin{matrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{l1} & \dots & v_{ln} \end{matrix}}}_{\in V^{l \times n}} = \boxed{\begin{matrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & \dots & w_{mn} \end{matrix}}$$

   mit $w_{ij} = \sum\limits_{h=1}^{l} \lambda_{ih} v_{hj}$

   Im Fall $|P| = 1$ ist dann („x wird nicht berücksichtigt“):
   $K^E \times V^{E \times D} \to V^D, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ gegeben durch $(\lambda \cdot v)(z) := \sum\limits_{y \in E} \lambda(y) \cdot v(y, z)$,
   ist zusätzlich $|D| = 1$ („z wird nicht berücksichtigt“) so erhalten wir die sogenannte Linearkombination von Vektoren aus $\mathbb{V}$ durch
   $K^E \times V^E \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ mit $\lambda v = \sum\limits_{y \in E} \lambda(y) \cdot v(y) \in V$.

Im Fall $E = \{1, \ldots, n\}$ sei $\lambda_i := \lambda(i)$ und $v_i := v(i)$ für $\lambda \in K^E \equiv K^n$ und $v \in V^E \equiv V^n$ und es ist:

$$\underbrace{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}_{\in K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\in V} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

„Linearkombination“ der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ über $\mathbb{K}$

Ein Vektor $v \in V$ ist Linearkombination der Vektorfamilie $\gamma \equiv (\gamma(y)|y \in E) \in V^E$ mit Koefizientenfamilie $\lambda \equiv (\lambda(y)|y \in E) \in K^E$ falls $v = \lambda \cdot \gamma$ gilt.

In der Algebra betrachtet man üblicherweise „Unterstrukturen“ als Teilmengen einer Grundmenge, die „abgeschloßen“ unter den zugrundeliegenden Operationen sind. Im Vektorraum-Fall sind diese Operationen die „Vektoraddition“, der „Nullvektor“ und die „skalare Multiplikation“.

2.5 Definition: „Untervektorräume“

Eine Teilmenge U eines Vektorraumes $\mathbb{V}$ ist Unterraum von $\mathbb{V}$, falls gilt

- Aus $u, v \in U$ folgt stets $u + v \in U$ und es ist $0 \in U$
- Aus $\lambda \in K$ und $u \in U$ folgt $\lambda u \in U$

Anmerkung

1. Untervektorräume sind abgeschloßen unter Linearkombination, d.h. für einen Unterraum U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{V}$ und eine beliebige nichtleere endliche Menge S ist $\lambda \cdot u = \sum\limits_{s \in S} \lambda(s) \cdot u(s) \in U$ falls $\lambda \in K^S$ und $u \in U^S$.
2. Der mengentheoretische Durchschnitt von Unterräumen eines Vektorraums ist stets wieder ein Unteraum.

2.6 Definition: „Erzeugen von Unterräumen“

Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und S eine nichtleere endliche Menge. Das Erzeugnis einer Vektorfamilie $\gamma \in V^S$ ist dann durch

$$Span_{\mathbb{V}}(\gamma) := \{\lambda \cdot \gamma | \lambda \in K^S\}$$

gegeben, wir schreiben für $Span_{\mathbb{V}}(\gamma)$ auch

$$\sum_{s \in S} K \cdot \gamma(s)$$

Gilt $S \subseteq V$, so sei $\iota_S : S \to V, s \mapsto s$ die Einbettungsabbildung von S in $\mathbb{V}$. In diesem Fall bezeichne $Span_{\mathbb{V}} S := Span_{\mathbb{V}}(\iota_S)$ das Erzeugnis von S in $\mathbb{V}$, es ist also $Span_{\mathbb{V}} S = \sum\limits_{s \in S} K_s$.

Anmerkung

1. Das Erzeugnis jeder Vektorfamilie in $\mathbb{V}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{V}$
2. Man zeige, dass $Span_{\mathbb{V}} S$ gerade der Durchschnitt aller Unterräume von $\mathbb{V}$, welche S enthalten, ist.

2.7 Anmerkung „Projektive Geometrien zu Vektorräumen“

1. Ein Paar $\mathbb{P} = (P, \leq)$ bestehend aus einer nichleeren Menge P und einer binären Relation $\leq$ auf P heißt geordnete Menge, falls gilt:

   (a) Relexivität: Es ist $x \leq x \; \forall x \in P$

   (b) Transitivität: Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z, \forall x, y, z \in P$

   (c) Antisymetrie: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y, \forall x, y \in P$

   Wir nennen $\mathbb{P}$ einen Verband, falls zusätzlich zu je zwei Elementen $x, y \in P$ eine kleinste obere Schranke, welche mit $x \vee y$ bezeichnet sei, existiert.
   D.h. es ist $x \leq x \vee y$ und $y \leq x \vee y$ und ferner folgt aus $x \leq t$ und $y \leq t$ stets $x \vee y \leq t$. Weiterhin existiert eine größte untere Schranke, bezeichnet mit $x \wedge y$.

2. Zu jedem Vektorraum $\mathbb{V}$ bezeichne $L(\mathbb{V})$ die Menge aller Unterräume von $\mathbb{V}$. Dann bildet die geordnete Menge $\mathbb{L}(\mathbb{V}) = (L(\mathbb{V}), \leq)$ einen Verband, den sogenannten Unterraumverband von $\mathbb{V}$, der auch als Projektive Geometrie zum Vektorraum $\mathbb{V}$ bekannt ist.
   Genauer gesagt, ist zu Unterräumen U und W von $\mathbb{V}$ die größte untere Schranke in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ durch $U \wedge W = U \cap W$ gegeben, und die kleinste obere Schranke durch $U \vee W = U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ gegeben.
   Für Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ von $\mathbb{V}$ heißt

   $$\sum_{i=1}^{k} U_i = U_1 + \ldots + U_k = \{\sum_{i=1}^{k} u_i | u_i \in U_i \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

   auch das Erzeugnis von $U_1, \ldots, U_k$ in $\mathbb{V}$. Also ist $U \wedge W$ durch den Durchschnitt von U und W und ferner $U \vee W$ durch das Erzeugnis von U und W gegeben.

3. ACHTUNG! Die reelle projektive Ebene ist gerade durch $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$ gegeben. (Dazu später genaueres). Allgemein heißt $\mathbb{L}(\mathbb{K}^3)$ projektive Ebene über dem Körper $\mathbb{K}$.

Kapitel 3

Unabhängigkeiten und Dimensionen

3.1 Definition: „Dirac-Funktion“

Sei P eine nichtleere endliche Menge und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für jedes $x \in P$ ist dann die Dirac-Funktion von P nach K an der Stelle x definiert als die Abbildung:

$$\delta_x^P : P \to K, t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } t = x \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

Interpretation

Die Dirac-Funktion an der Stelle x ist eine „normierte Gewichtsfunktion“ von P nach $\mathbb{K}$, die der Stelle x das Gewicht 1 und jedem anderen Element von P das Gewicht 0 zuordnet.

3.2 Bemerkung

Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

1. δ_x^P tritt als Zeile und Spalte zu $x \in P$ in der Einheitsmatrix I_P von $M_P(\mathbb{K})$ auf.

2. Jedes $v \in K^P$ lässt sich schreiben als $v = \sum\limits_{x \in P} v(x) \cdot \delta_x$
   Also gilt für $\delta^P : P \to K^P, x \mapsto \delta_x^P$ stets $v = v \cdot \delta^P$, d.h v ist Linearkombination von $\delta^P \equiv (\delta_x^P | x \in P)$.
   Für $P = \{1, \ldots, n\}$ heißt dies: $v = v(1)\delta_1^P + \ldots + v(n)\delta_n^P$. Also mit $v_i = v(i) \in K$ gilt $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ und $\delta_1^P = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \delta_n^P = \{0, 0, 0, \ldots, 1\} \in K^n$ und man erhält $(v_1, \ldots, v_n) = v_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + \ldots + v_n(0, 0, 0, \ldots, 1)$.

   $$\delta^P = \begin{pmatrix} \delta_1^P \\ \vdots \\ \delta_n^P \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (1, 0, \ldots, 0) \\ (0, 1, \ldots, 0) \\ \ddots \\ (0, 0, \ldots, 1) \end{pmatrix} \equiv I_n$$

   $\delta_i^P = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$ i-ter Einheitsvektor in K^n

3. $\delta^P = (\delta_x^P | x \in P)$ heißt Standardbasis von $\mathbb{K}^P$. Jeder Vektor v aus $\mathbb{K}^P$ ist eindeutige Linearkombination der Standardbasis (wegen $v = v \cdot \delta^P$)

4. Für $\lambda \in K^P$ und $v \in V$ und $\gamma \in V^P$ mit $v = \lambda \cdot \gamma$ heißt λ auch Koordinaten-Tupel von v bzgl. γ.

3.3 Definition

Sein $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, S eine endliche nichtleere Menge und $\gamma : S \to V$ eine Abbildung, die wir auch als Familie von Vektoren aus $\mathbb{V}$ auffassen.

1. Es heißt γ unabhängig, falls aus $\lambda \cdot \gamma = \mu \cdot \gamma$ stets $\lambda = \mu$ folgt,$\forall \lambda, \mu \in K^S$.
   Anmerkung: γ ist unabhängig genau dann, wenn aus $\lambda \cdot \gamma = 0$ bereits $\lambda = 0_S$ folgt, für alle $\lambda \in K^S$.
   Fall 1: $S = \{1, \ldots, n\}$ und $u_i \equiv \gamma(i)$
   Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ sind unabhängig genau dann, wenn für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ aus $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ bereits $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt.
   Fall 2: Ist $S \subseteq V$, so heißt S unabhängige Menge von Vektoren in $\mathbb{V}$, falls $\iota_S : S \to V, s \mapsto s$ unabhängige Familie ist, d.h. es gilt: Aus $\sum\limits_{s \in S} \lambda(s) \cdot s = 0$ folgt bereits $\lambda = 0_S$ für alle $\lambda \in K^S$.

2. Es heißt γ erzeugende Familie in $\mathbb{V}$ falls zu jedem $v \in V$ ein $\lambda \in K^S$ mit $v = \lambda \cdot \gamma$ existiert, d.h. es ist $Span_{\mathbb{V}} \gamma = V$.
   Fall 1: $S = \{1, \ldots, n\}$ und $u_i \equiv \gamma(i)$
   Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ erzeugen $\mathbb{V}$ falls $V = \mathbb{K} \cdot u_1 + \ldots + \mathbb{K} \cdot u_n$ gilt.
   Fall 2: Ist $S \subseteq V$, so erzeugt S den Vektorraum $\mathbb{V}$, falls $V = Span_{\mathbb{V}} S$ gilt.

3. Es heißt γ Basis von $\mathbb{V}$ falls γ eine unabhängige und erzeugende Familie von $\mathbb{V}$ ist.
   Anmerkung: γ ist Basis von $\mathbb{V}$ gdw. die Abbildung $\mathbb{K}^S \to \mathbb{V}, \lambda \mapsto \lambda \cdot \gamma$ eine Bijektion ist. (Unabhängigkeit bedeutet die Injektivität dieser Abbildung und die Eigenschaft „erzeugend“ bedeutet Surjektivität.)
   Fall 1: $S = \{1, \ldots, n\}$ und $u_i = \gamma(i)$
   Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ bilden eine Basis von $\mathbb{V}$ genau dann, wenn die Abbildung $\mathbb{K}^n \to V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ eine Bijektion ist, d.h. jeder Vektor aus $\mathbb{V}$ ist eindeutige Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$.
   Anmerkung: Die Standardbasis $\delta^P = (\delta^P_x | x \in P)$ von $\mathbb{K}^P$ ist Basis im hier definierten Sinne.
   Fall 2: Ist $S \subseteq V$, so bildet S eine Basis von $\mathbb{V}$, falls $Span_{\mathbb{V}} S = V$ und $Span_{\mathbb{V}} T \subset V$ für jede echte Teilmenge T von S ist, d.h. S ist „minimales Erzeugendes System“ von $\mathbb{V}$.

3.4 Vereinbarung: „Linearkombination unendlicher Familien von Vektoren“

1. Gegeben sei eine nichtleere Menge S, die wir hier aber nicht als endlich voraussetzen! Ist $\mathbb{K}$ Körper, so bezeichne $\mathbb{K}^{(S)}$ den Vektorraum aller Abbildungen $\lambda : S \to K$ mit endlichem „Träger“, wobei der Träger von λ durch die Menge $Supp(\lambda) := \{s \in S | \lambda(s) \neq 0\}$ definiert ist.

2. Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und S eine nichtleere Menge. Für λ aus $\mathbb{K}^{(S)}$ und $\gamma \in V^S$ ist folgende Linearkombination von γ erklärt:

$$\lambda \cdot \gamma := \sum_{s \in Supp(\lambda)} \lambda(s) \cdot \gamma(s)$$

3. Ersetzt man in den vorangegangen Definitionen jeweils $\mathbb{K}^S$ durch $\mathbb{K}^{(S)}$, so sind mit dem hier erweiterten Begriff der Linearkombination auch für unendliche Familien von Vektoren die Konzepte „Unabhängigkeit“, „Erzeugen“ und „Basis“ erklärt: Sei dazu γ ein Familie von Vektoren aus $\mathbb{V}$, d.h. sei $\gamma \in V^S$

- γ ist unabhängig in $\mathbb{V}$, falls die Abbildung $K^{(S)} \to V^S, \lambda \mapsto \lambda \cdot \gamma$ injektiv ist.
- γ erzeugt den Vektorraum $\mathbb{V}$, falls die Abbildung $K^{(S)} \to V^S, \lambda \mapsto \lambda \cdot \gamma$ surjektiv ist.
- γ ist Basis des Vektorraum $\mathbb{V}$, falls die Abbildung $K^{(S)} \to V^S, \lambda \mapsto \lambda \cdot \gamma$ bijektiv ist.

Anmerkung

Für unendliche Mengen S ist die Vektorfamilie $\delta^S = (\delta^S_x | x \in S)$ keine Basis von $\mathbb{V}^S$!
Frage: Hat $\mathbb{V}^S$ überhaupt eine Basis?
Antwort: Ja (aber mit Austauschaxiom)

3.5 Satz

1. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, und je zwei Basen eines Vektorraumes haben die gleiche Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit heißt auch die Dimension des Vektorraumes. Ist $\gamma \in V^S$ Basis von $\mathbb{V}$, so setzen wir $dim\mathbb{V} := |S|$. Falls $S = \{1, \ldots, n\}$, $u_1, \ldots, u_n$ Basis von $\mathbb{V}$, so ist $dim\mathbb{V} = n$.

2. Jede unabhängige Teilmenge eines Vektorraumes ist in einer Basis enthalten.

3. Jede erzeugende Teilmenge eines Vektorraumes enthält eine Basis.

Der Beweis von Satz 3.5 beruht auf folgenden Sachverhalt.

3.6 Proposition

Sei T Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{V}$ und seien $u, v \in V$ mit $u \notin Span_{\mathbb{V}} T$. Dann gilt:

1. „Austauschsatz“
   Ist $u \in Span_{\mathbb{V}}(\{v\} \cup T)$, so ist auch $v \in Span_{\mathbb{V}}(\{u\} \cup T)$.

2. Ist T unabhängig in $\mathbb{V}$, so ist auch $\{u\} \cup T$ unabhängig in $\mathbb{V}$.

Beweis

Man setzte $S := \{v\} \cup T$

1. Aussage: Zu $u \in Span_{\mathbb{V}} S$ existiert ein Koordinatentupel $\lambda \in K^S$ mit $u = \lambda \cdot \iota_S = \sum\limits_{s \in Supp(\lambda)} \lambda(s) \cdot s$. Sei μ die Einschränkung von λ auf T, also $\mu = \lambda | T$ (d.h. $\mu : T \to K, t \mapsto \lambda(t)$). Dann ist $u = \lambda \cdot \iota_S = \lambda(v) \cdot v + \mu \cdot \iota_T$. Wäre $\lambda(v) = 0$, so wäre $u = \mu \cdot \iota_T \in Span_{\mathbb{V}} T$ ↯; also ist $\lambda(v) \neq 0$ und wegen $\lambda(v) \cdot v = u - \mu \cdot \iota_T$ folgt nun:
$$v = \underbrace{\lambda(v)^{-1} \cdot u}_{\in \{u\}} - \underbrace{\lambda(v)^{-1} \cdot \mu \cdot \iota_T}_{\in Span_{\mathbb{V}} T} \in Span_{\mathbb{V}}(\{u\} \cup T)$$
qed.

2. Aussage: Annahme $U := \{u\} \cup T$ ist abhängig (d.h. nicht unabhängig).
   Dann existiert ein $\lambda \in K^U$ mit $\lambda \neq 0_U$ und $\lambda \cdot \iota_U = 0$. Für die Einschränkung $\mu := \lambda | T$ ist damit $0 = \lambda \cdot \iota_U = \lambda(u) \cdot u + \mu \cdot \iota_T$. Wäre $\lambda(u) = 0$, so wäre $\mu \cdot \iota_T = 0$, und wegen der Unabhängigkeit von T würde $\mu = 0_T$ folgen und also $\lambda = 0_U$ (da auch $\lambda(u) = 0$) folgen ↯; daher folgt $\lambda(u) \neq 0$ und es ergibt sich $u = -\lambda(u)^{-1} \cdot \mu \cdot \iota_T \in Span_{\mathbb{V}}(T)$. ↯
   Also ist die obige Annahme falsch, d.h. $U = \{u\} \cup T$ ist unabhängig.

qed.

Kapitel 4

Lineare Abbildungen

4.1 Definition: „Lineare Abbildungen“

Eine lineare Abbildung von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{V}$ in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{W}$ ist erklärt als Abbildung $f : V \to W$, die sämtlichen Vektorraumoperationen verträglich ist, d.h. für die gilt:

- „Additiv“ $f(u+v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in V$
- „Respektiert Nullvektor“ $f(0) = 0$
- „Respektiert skalare Multiplikation“ $f \cdot \underline{\lambda} = \underline{\lambda} \cdot f$ für alle $\lambda \in K$, d.h. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $\lambda \in K, v \in V$

Die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ soll künftig mit $Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ bezeichnet werden.(Manchmal wird in Fachliteratur auch $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ analog dazu verwendet.)

Injektive lineare Abbildungen heißen auch Einbettungen oder Monomorphismen. (z.B Ebene im Raum)
Surjektive lineare Abbildungen heißen auch Epimorphismen. (z.B. Projektion eines Raumes in die Ebene)
Bijektive lineare Abbildungen heißen auch Isomorphismen.

Wir sagen $\mathbb{V}$ ist isomorph zu $\mathbb{W}$, falls ein Isomorphismus von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ existiert (d.h. es gibt eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$) (z.B. das Drehen eines Objekts im Raum).
Die Menge $Lin(\mathbb{V}) := Lin(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ also die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{V}$ auf sich selbst, wird als Menge der Endomorphismen von $\mathbb{V}$ bezeichnet. Die bijektiven Endomorphismen von $\mathbb{V}$ heißen Automorphismen.

4.2 Beispiel „Abbildungskonstruktion“

1. Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und S eine nichtleere Menge. Zu jeder Familie $\gamma \in V^S$ von Vektoren aus $\mathbb{V}$ existiert die lineare „Koordinatenabbildung“ („Linearkombinationsabbildung“) f_γ von $\mathbb{K}^S$ (also die Menge aller Koordinatentupel λ mit endlichen Träger) nach $\mathbb{V}$, $f_\gamma : K^{(S)} \to V, \lambda \mapsto \lambda \cdot \gamma$:

   <u>Fall:</u> $S = \{1, \ldots, n\}$ und $\gamma \equiv (u_1, \ldots, u_n) \in V^n$ und $\lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
   $f_\gamma : K^n \to V, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$
   Sind $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume, so heißt $\mathbb{V}$ isomorph zu $\mathbb{W}$, in Zeichen, $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$, falls es einen Isomorphismus von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ gibt.

   - f_γ ist Monomorphismus (Einbettung) gdw. γ unabhängig (injektiv) in $\mathbb{V}$ ist.

- f_γ ist Epimorphismus gdw. γ erzeugend (surjektiv) in $\mathbb{V}$ ist.
- f_γ ist Isomorphismus gdw. γ Basis (bijektiv) von $\mathbb{V}$ ist.

Ist γ Basis, so folgt $\mathbb{K}^{(S)} \cong \mathbb{V}$. Zu $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{V}$ existiert also eine Menge S mit $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^{(S)}$
Beachtliche Folgerung: Je zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit gleicher Dimension (d.h. mit gleichmächtigen Basen) sind bereits isomorph!

2. Zu jeder Matrix $A \in K^{P\times E}$ (wobei $\mathbb{K}$ Körper und P, E nichtleere endlichen Mengen seien) existiert die lineare Abbildung r_A („rechtsseitige Matrixmultiplikation – d.h. A steht rechts“) von $\mathbb{K}^P$ nach $\mathbb{K}^E$ vermöge

$$r_A : K^P \to K^E, u \mapsto u \cdot A$$

und die lineare Abbildung l_A („linksseitige Matrixmultiplikation“) von $\mathbb{K}^E$ nach $\mathbb{K}^P$ vermöge

$$l_A : K^E \to K^P, w \mapsto A \cdot w$$

4.3 Proposition

1. Für $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ ist stets $Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{W}^V = (W^V, +, 0, (\underline{\lambda}|\lambda \in K))$
2. Für $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ und für $f \in Lin(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ und $g \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ liegt stets die Abbildung („Verkettung“)

$$g \circ f : U \to W, u \mapsto g(f(u))$$

in $Lin(\mathbb{U}, \mathbb{W})$.

3. Die Struktur $(Lin\mathbb{V}, +, 0, \circ, id_V)$ ist ein Ring, der sogenannte Endomorphismen-Ring von $\mathbb{V}$; überdies ist $\mathbb{L}in\mathbb{V} := (Lin\mathbb{V}, +, 0, \circ, id_V, (\underline{\lambda}|\lambda \in K))$ die sogenannte Endomorphismen-Algebra von $\mathbb{V}$.

4.4 „Darstellung von Endomorphismen durch Matrizen“

Sei P eine endliche nichtleere Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist die Matrizen-Algebra

$$\mathbf{M}_P(\mathbb{K}) := (K^{P\times P}, +, 0, \cdot, I_P, (\underline{\lambda}|\lambda \in K))$$

isomorph zur Endomorphismen-Algebra vermöge $K^{P\times P} \to Lin(\mathbb{K}^P), A \mapsto l_A$.
Zum Beweis:

$$\begin{aligned}
A, B \in K^{P\times P} \\
l_{A+B} : K^P \to K^P, w \mapsto (A+B)\cdot w &= A\cdot w + B \cdot w \\
&= l_A \cdot w + l_B \cdot w \\
&= (l_A + l_B)\cdot w \\
l_{A+B} &= l_A + l_B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_{\lambda A}(w) &= (\lambda \cdot A) \cdot w \\
&= \lambda \cdot (A \cdot w) \\
&= \lambda \cdot (l_A(w)) \\
&= \lambda \cdot l_A(w) \\
l_{\lambda A} &= \lambda \cdot l_A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{A \cdot B}(w) &= (A \cdot B) \cdot w \\
&= A \cdot (B \cdot w) \\
&= l_A \cdot (l_B(w)) \\
&= (l_A \circ l_B)(w) \\
l_{A \cdot B} &= l_A \circ l_B
\end{aligned}
$$

qed

<u>Man beachte:</u>

$$w(y) = \sum_{z \in P} \delta_y^P(z) \cdot w(z)$$

also $w = \delta_y^P \cdot w$; $w : P \to K$.
Für $A_f : P \times P \to K, (x, y) \mapsto (f(\delta_y^P))(x)$, d.h. $A_f(\bullet, y) := f(\delta_y^P)$.
Dann ist $l_A(\delta_y^P) = A \cdot \delta_y^P = A(\bullet, y)$ und somit ist $l_{A_f}(\delta_y^P) = A_f(\bullet, y) = f(\delta_y^P) \Rightarrow l_{A_f} = f \Rightarrow A \to l_A$ (Bijektiv).

4.5 Satz

Sei P eine nichtleere endliche Menge und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist die Matrizen-Algebra

$$\mathbb{M}_P(\mathbb{K}) = (K^{P \times P}, +, 0, \cdot, I_P, (\underline{\lambda} | \lambda \in K))$$

isomorph zur Endomorphismen-Algebra $\mathbb{L}in(\mathbb{K}^P) = (Lin(\mathbb{K}), +, 0, \circ, id_{\mathbb{K}^P}, (\underline{\lambda} | \lambda \in K))$ vermöge der Zuordnung $l : K^{P \times P} \to Lin\mathbb{K}^P, A \mapsto l_A$

<u>Beweis:</u> Für alle $A, B \in K^{P \times P}$ und $\lambda \in K$ gilt:

1. „l ist additiv“:
   Es ist $l_{A+B} = l_A + l_B$ wegen $l_{A+B}(w) = (A + B) \cdot w = A \cdot w + B \cdot w = l_A(w) + l_B(w) = (l_A + l_B)(w)$ für alle $w \in K^P$.

2. „l ist multiplikativ“:
   Es ist $l_{A \cdot B} = l_A \circ l_B$ wegen $l_{A \cdot B}(w) = (A \cdot B) \cdot w = A \cdot (B \cdot w) = l_A \cdot (l_B(w)) = (l_A \circ l_B)(w)$ für alle $w \in K^P$

3. Es ist $l_{I_P} = id_P$ wegen $l_{I_P}(w) = I_P \cdot w = w$ für alle $w \in K^P$.

4. „l ist skalar-multiplikativ“:
   Es ist $l_{\lambda A} = \lambda l_A$ wegen $l_{\lambda A}(w) = (\lambda A) \cdot w = \lambda(A \cdot w) = \lambda(l_A(w)) = (\lambda l_A)(w)$ für alle $w \in K^P$ und $\lambda \in K$.

5. „l ist injektiv“:
   $l_A = 0 \Rightarrow A = 0$ (reicht, da aus $l_A = l_B$ stets $l_{A-B} = l_A - l_B = 0$ folgt und dann $A = B = 0$ also A=B folgt).
   <u>Denn</u>: Aus $l_A = 0$ folgt $0 = l_A(\delta_y^P) = A \cdot \delta_y^P = A(\bullet, y)$ für alle $y \in P$, d.h. $A = 0$

6. „l ist surjektiv“:
   Sei f lineare Abbildung aus $Lin\mathbb{K}^P$; definiert dann die Matrix $A \in K^{P\times P}$ durch $A(x,y) = (f(\delta_y^P)(x)$ für alle $x, y \in P$; folglich ist $f(\delta_y^P) = A(\bullet, y) = A \cdot \delta_y^P = l_A(\delta_y^P)$ für alle $y \in P$, d.h. die linearen Abbildungen f und l_A stimmen auf der Standardbasis $\delta_P \equiv (\delta_y^P | y \in P)$ überein und sind daher gleich : $f = l_A$

qed

4.6 Beispiel: $\mathbb{K} = \mathbb{R}, P = \{1, 2, 3\}, \mathbb{K}^P \equiv \mathbb{R}^3$

f ist die beschriebene 90° Drehung um die z-Achse, wobei $\delta_1^P = (1,0,0)$, $\delta_2^P = (0,1,0)$ und $\delta_3^P = (0,0,1)$. $f \in Lin(\mathbb{R}^3)$
Gesucht ist nun die Matrix A zu dieser Funktion f.
Aus obigen Überlegungen folgt: $A(\bullet, j) = f(\delta_j^P)$ (j-te Spalte von A)

$$\text{also} \begin{pmatrix} A(\bullet,1) & = & f(\delta_1^P) & = & \delta_2^P & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A(\bullet,2) & = & f(\delta_2^P) & = & -\delta_1^P & = & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A(\bullet,3) & = & f(\delta_3^P) & = & \delta_3^P & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4.7 Proposition

Seien $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\beta \in V^P$ und $\gamma \in W^E$.

1. „Lineare Fortsetzung“
   Jede lineare Abbildung $\phi : \beta(P) \to W$ läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung $f \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ „fortsetzen“ (d.h die Einschänkung von f auf $\beta(P)$ ist gleich ϕ, d.h. es ist $f(\beta(x) = \phi(\beta(x))$ für alle $x \in P$.

   Kurzbegründung für Interessierte:
   $f := f_{\phi\circ\beta} \circ f_\beta^{-1}$
   $\hookrightarrow$ Dann ist nämlich $f \circ f_\beta = f_{\phi\circ\beta}$

$$\begin{array}{cccc} P & & \beta\circ\phi & \\ \beta\downarrow & \searrow & & \\ V = \beta(P) & \xrightarrow{\phi} & W & \\ f_\beta \uparrow\downarrow f_\beta^{-1} & & \uparrow & f_{\phi\circ\beta} \\ K^P & = & K^P & \end{array}$$

   Also ist $f(\underbrace{f_\beta(\delta_x^P)}_{\beta(x)}) = \underbrace{f_{\phi\circ\beta}(\delta_x^P)}_{(\phi\circ\beta)(x)}$
   d.h. $f(\beta(x)) = (\phi\circ\beta)(x) = \phi(\beta(x))$ für alle $x \in P$.

Eindeutigkeit:
Sei $f \circ \beta = g \circ \beta$ für $f, g \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ Da $\beta \in K^P$ Basis von $\mathbb{V}$ ist, existiert zu jedem $v \in V$ ein $\lambda \in K^P$ mit $v = \lambda\beta = \sum_{x \in P} \lambda(x) \cdot \beta(x)$. Aus der Linearität von f und g folgt:

$$f(v) = f(\sum_{x \in P} \lambda(x) \cdot \beta(x))$$

$$\underbrace{=}_{flinear} \sum_{x \in P} \lambda(x) \cdot f(\beta(x))$$

$$\underbrace{=}_{(f \circ \beta)(x) = (g \circ \beta)(x)} \sum_{x \in P} \lambda(x) \cdot g(\beta(x))$$

$$\underbrace{=}_{glinear} g(\sum_{x \in P} \lambda(x) \cdot \beta(x)) = g(v)$$

d.h. $f = g$.

qed

2. „Rechtsseitige Matrizendarstellung linearer Abbbildung“
Für jede lineare Abbildungen $f \in Lin(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ existiert genau eine Matix $A \in K^{P \times E}$ mit $f \circ f_\beta = f_\gamma \circ r_A$.

$$\begin{array}{ccccc} & P & & E & \\ \beta & \downarrow & f & \downarrow & \gamma \\ & V & \rightarrow & W & \\ f_\beta & \downarrow & & \uparrow & f_\gamma \\ & K^P & \rightarrow & K^E & \\ & & r_A & & \end{array}$$

A nennen wir die rechtsseitge Matrizendarstellung von f bzgl. β und γ.
$A^T : E \times P \rightarrow K, (x, y) \mapsto A(y, x)$ ist dann die linksseitige Matrizendarstellung von f bzgl. β und γ.

Begründung:
Wir setzen $A(x, y) := ((f_\gamma^{-1} \circ f \circ f_\beta)(\delta_x^P))(y)$ für alle $x \in P$ und $y \in E$.
Dann ist $(f_\gamma^{-1} \circ f \circ f_\beta)(\delta_x^P) = A(x, \bullet) = \delta_x^P \cdot A = r_A(\delta_x^P)$. Nach Teil 1. folgt nun bereits $f_\gamma^{-1} \circ f \circ f_\beta = r_A$, d.h. $f \circ f_\beta = f_\gamma \circ r_A$.

qed

Anmerkung

Bei rechtsseitiger Matrizenmultiplikation r_A interpretieren wir $\mathbb{K}^P$ und $\mathbb{K}^E$ als Vektorräume von Zeilenvektoren. Bei linksseitiger Matrizenmultiplikation transponieren wir alles: $\mathbb{K}^P$ und $\mathbb{K}^E$ als Vektorräume von Spaltenvektoren aufgefasst und l_B ist die zu f gehörige linksseitige Matrizenmultiplikation für $B := A^T : E \times P \rightarrow K, (x, y) \mapsto A(y, x)$.
Also gehört $B(x, y) = (f_\gamma^{-1} \circ f \circ f_\beta)(\delta_y^P)(x)$ zur linearen Abbildung f bzgl. β und γ und damit

$B(\bullet, y) = (f_\gamma^{-1} \circ f \circ f_\beta)(\delta_y^P)$. B ist die zu f bzgl. β und γ gehörige linksseitige Matrix.

Im Spezialfall $V = W = K^P$ und $\beta = \gamma = \delta^P$ beschreibt also $B(\bullet, y) = f(\delta_y^P)$ die zu f bzgl. der Standardbasis δ^P in K^P gehörige linksseitige Matrix.

Erweiterung

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & V & \rightarrow & W & \\ f_\beta & \uparrow & & \downarrow & f_\gamma^{-1} \\ & & l_B & & \\ & K^P & \rightarrow & K^E & \\ & & r_A & & \end{array}$$

$$B = A^T$$

$A_\beta : P \times P \to K, (t, x) \mapsto (\beta(t))(x)$
$A_f : P \times E \to K, (x, y) \mapsto (f(x))(y)$
$A_\gamma : E \times E \to K, (y, z) \mapsto (\gamma(y))(z)$
$A = A_\gamma^{-1} \cdot A_f \cdot A_\beta$, also ist A durch A_β, A_f und A_γ bestimmt!
Für $B := A^T, B_\beta := A_\beta^T, B_f := A_f^T, B_\gamma := A_\gamma^T$ erhalten wir also $B = B_\gamma^{-1} \cdot B_f \cdot B_\beta \in K^{E \times P}$,
(da $A^T = A_\beta \cdot A_f \cdot A_\gamma^{-1} = (A_\gamma^{-1})^T \cdot A_f^T \cdot A_\beta^T = (A_\gamma^T)^{-1}$) mit
$B_\gamma : E \times E \to K(z, y) \mapsto (\gamma(y))(z)$
$B_f : E \times P \to K(y, x) \mapsto (f(x))(y)$
$B_\beta : P \times P \to K(x, t) \mapsto (\beta(t))(x)$

4.8 Beispiel: „Komposition von Bewegungen“

Aufgabe:
Man berechne die Komposition (d.h. die Hintereinanderausführung) von zwei Drehungen im Raum und zwar sei f die Linksdrehung um die z-Achse um den Winkel α gefolgt von g, erklärt als die Linksdrehung um die x-Achse um den Winkel β.

Lösung:
Matrix zu f:

$$\begin{pmatrix} B(\bullet,1) & = & f(\delta_1^P) & = & \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ B(\bullet,2) & = & f(\delta_2^P) & = & \begin{pmatrix} -sin\alpha \\ cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ B(\bullet,3) & = & f(\delta_3^P) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog folgt für g die Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$$

Die Matrix zu $g \circ f$ ist also $C \cdot B$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ cos\beta sin\alpha & cos\beta cos\alpha & -sin\beta \\ sin\beta sin\alpha & -sin\beta sin\alpha & cos\beta \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 cos\alpha - x_2 sin\alpha \\ x_1 cos\beta sin\alpha + x_2 cos\beta cos\alpha - x_3 sin\beta \\ x_1 sin\beta sin\alpha - x_2 sin\beta sin\alpha + x_3 cos\beta \end{pmatrix}$$

4.9 Mitteilung

Ist in 4.7 die lineare Abbildung f von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ bijektiv (d.h. ist f ein Isomorphismus), so exstieren Basen $\beta \in V^P$ von $\mathbb{V}$ und $\gamma \in W^P$ von $\mathbb{W}$ mit $B_\gamma^{-1} \cdot B_f \cdot B_\alpha = I_P$.

4.10 Beispiel: "Bewegungsverkettung"

Seien f und g Linksdrehungen im Winkel $\frac{\Pi}{2}$ um die z-Achse bzw. die x-Achse. Wir wollen $h := g \circ f$ "verstehen". Was ist das für eine Abbildung?

$$f(\delta_1) = \delta_2, f(\delta_2) = -\delta_1, f(\delta_3) = \delta_3$$

$$B = (\delta_2, -\delta_1, \delta_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die zu f gehörige Matrix (bzgl. der Standardbasis)

$$g(\delta_1) = \delta_1, g(\delta_2) = \delta_3, g(\delta_3) = -\delta_2$$

$$C = (\delta_1, \delta_3, -\delta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die zu g gehörige Matrix (bzgl. der Standardbasis).

Die zu h gehörige Matrix (bzgl. der Standardbasis) ist also

$$D := C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h $h(\delta_1) = \delta_3, h(\delta_2) = -\delta_1, h(\delta_3) = -\delta_2$

$$\begin{array}{ccccc} \delta_1 & \overset{f}{\mapsto} & \delta_2 & \overset{g}{\mapsto} & \delta_3 \\ \delta_2 & \overset{f}{\mapsto} & -\delta_1 & \overset{g}{\mapsto} & -\delta_1 \\ \delta_3 & \overset{f}{\mapsto} & \delta_3 & \overset{g}{\mapsto} & -\delta_2 \end{array}$$

$$h(v) = D \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Wann gilt $h(v) = v$?

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist h eine Drehung um die Achse $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bleibt punktweise fix unter h.

Berechne D^3:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = D \cdot D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\delta_1+\delta_2} \overset{h}{\mapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\delta_1+\delta_3} \overset{h}{\mapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} -0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\delta_2-\delta_3} \overset{h}{\mapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\delta_1+\delta_2} \quad \Bigg| \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\delta_1-\delta_2+\delta_3} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:
Die Verkettung einer 90° - Linksdrehung f um die z-Achse mit einer 90°-Linksdrehung g um die x-Achse ergibt eine 120° Linksdrehung $h = g \circ f$ um die Achse $\mathbb{R}^+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (wobei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichne).

Kapitel 5

Affine Unterräume und Gleichungssysteme

5.1 Definition

Eine Teilmenge T eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{V}$ heißt affiner Unterraum von $\mathbb{V}$, falls $T = \varnothing$ (d.h. T ist der „leere affine Raum") oder falls es einen Unterraum U von $\mathbb{V}$ und einen Vektor $v \in V$ mit $T = v + U := \{v + u | u \in U\}$ gibt. Insbesondere ist $\{v\} = v + \{0\}$ ein affiner Unterraum für jedes $v \in V$.

5.2 Beispiel

1. Ist f eine lineare Abbildung eines Vektorraumes $\mathbb{V}$ in einen Vektorraum $\mathbb{W}$, so ist $f^{-1}(T) := \{v \in V | f(v) \in U\}$ affiner Unterraum von $\mathbb{V}$, für jeden affinen Unterraum T von $\mathbb{W}$. Insbesondere ist $f^{-1}(w) := \{v \in V | f(v) = w\} = v + f^{-1}(0)$ affiner Unteraum von $\mathbb{V}$. $f^{-1}(0)$, der sogenannte Kern von f, ist sogar ein Unterraum von $\mathbb{V}$.

2. Der Durchschnitt affiner Unterräume eines Vektorraumes ist stets ein affiner Unterraum.

3. Zu einer Vektorfamilie $\gamma \in V^P$ ist $\mathrm{Aff}(\gamma) := \{\lambda \cdot \gamma | \lambda \in K^{(P)}$ mit $\sum\limits_{x=\mathrm{Supp}(\lambda)} \lambda(x) = 1\}$ der kleinste affine Unterraum, welcher $\gamma(P)$ enthält. Daher heißt $\gamma(P)$ auch das affine Erzeugnis von γ.
   Z.B: $P = \{1, \cdots, n\}, \lambda_i \equiv \lambda(i), v_i := \gamma(i)$; dann ist

   $$\mathrm{Aff}(\gamma) = \mathrm{Aff}(v_1, \cdots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K \text{ mit } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}$$

   Für $n = 2$ heißt dies $\mathrm{Aff}(v_1, v_2) = \{\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 | \lambda \in K\} = \underbrace{v_2 + \underbrace{K(v_1 - v_2)}_{U}}_{T = v_2 + U} =: v_1 \vee v_2$

   Für $n = 3$ heißt dies $\mathrm{Aff}(v_1, v_2, v_2) = \{\lambda v_1 + \mu v_2 + (1 - \lambda - \mu) v_3 | \lambda, \mu \in K\} = v_3 + K(v_1 - v_3) + K(v_2 - v_3) =: v_1 \vee v_2 \vee v_3$

   Ergebnis: $\mathrm{Aff}(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + K(v_1 - v_n) + \ldots + K(v_{n-1} - v_n) = v_n + Span(v_1 - v_n, \ldots v_{n-1} - v_n)$

4. Sei $A : P \times E \to K$ eine Matrix und sei $b \in K^P$ (P,E sind endliche Mengen). Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ (in der „Unbekannten x"), also die Menge $\{x \in K^E | A \cdot x = b\}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^E$, der sogenannte affine Lösungsraum zu A und b.
   Begründung: Der obige Lösungsraum ist gegeben durch die Menge $l_A^{-1}(b)$, wobei l_A :

$K^E \to K^P, x \mapsto Ax$ die Linksmultiplkation mit A ist.
Achtung: Ist $Av = b$, so gilt $l_A^{-1}(b) = v + l_A^{-1}(0)$

5.3 Proposition

Sei $A : P \times E \to K$ eine Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $b \in K^P$. Dann ist die Lösungsmenge des „inhomogene Gleichungssystems“ $Ax = b$ (mit $b \neq 0$) entweder der leere affine Raum oder es existiert ein $v \in K^E$ mit $Av = b$; in diesem Fall ist der Lösungsraum von $Ax = b$ durch $l_A^{-1}(b) = v + l_A^{-1}(0)$ gegeben.
Hierbei beachte man, dass $l_A^{-1}(0)$ der Lösungraum des „homogenen“ Gleichungssystems $Ax = 0$ ist.
Unser Vorgehen wird also sein, zunächst eine Lösung zu $Ax = b$ zu finden (falls diese existert) und anschließend $l_A^{-1}(0) = \{x \in K^E | Ax = 0\}$ zu bestimmen.
Für das Folgende benutzen wir implizit folgende gravierende Eigenschaft:
Sei $C : P \times P \to K$ eine invertierbare Matrix über $\mathbb{K}$, d.h. es existiert eine Matrix C^{-1} mit $C^{-1}C = CC^{-1} = I_P$.
Für $A : P \times E \to$ und $b \in K^P$ gilt dann: $l_A^{-1}(b) = \{x \in K^E | Ax = b\} = l_{CA}^{-1}(Cb) = \{x \in K^E | CAx = Cb\}$. Insbesondere ist. $l_A^{-1}(0) = l_{CA}^{-1}(0)$

5.4 Propsition

Elementare Zeilenoperationen ändern den „Kern“ $l_A^{-1}(0) = \{x \in K^E | Ax = 0\}$ einer Matrix A nicht.

Elementare Zeilenoperationen

1. Ersetze eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer Vielfachen einer anderen Zeile.
2. Vertausche zwei Zeilen.
3. Multipliziere eine Zeile mit einem Skalar, der ungleich Null ist.

Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, falls gilt:

1. Alle Nichtnullzeilen stehen oberhalb aller Nullzeilen.
2. Ein Zeilenführer steht stets in einer Spalte rechts vom Führer der Zeile darüber.
3. Alle Einträge unterhalb des Zeilenführers sind gleich Null.

Reduzierte Zeilenstufeform

Eine Matrix in Zeilenstufenform ist in reduzierter Zeilenstufenform, wenn sie zusätzlich die folgende Bedingungen erfüllt.

1. Jeder Zeilenführer hat den Wert 1.
2. Jeder Zeilenführer ist der einzige Eintrag in seiner Spalte, der nicht gleich Null ist.

5.5 Proposition

Jede Matrix A ist zu genau einer Matrix in reduzierter Stufenform „Zeilenäquivalent", d.h. es existiert eine Matrix C (als Produkt elementarer Zeilenoperationen) derart, dass

$$\underbrace{C}_{m\times m}\cdot\underbrace{A}_{m\times n}=\left(\begin{array}{c|c} I_k & D \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$

gilt (für geeignete D)(ggf. Spaltenpermutationen).

Anmerkung

Für $P=\{1,\dots,m\}$ und $E=\{1,\dots,n\}$

$$Ax=b\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} A_{11}x_1 & +\ldots+ & A_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots & & \\ A_{m1}x_1 & +\ldots+ & A_{mn}x_n=b_m\end{array}$$

Beispiel

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\6&5\end{pmatrix}\underbrace{\rightarrow}_{III-3I}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\0&2\end{pmatrix}\underbrace{\rightarrow}_{II-2I}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&2\end{pmatrix}\underbrace{\rightarrow}_{III-2II}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{\rightarrow}_{I-II}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{\rightarrow}_{\frac{1}{2}I}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Zur Lösung inhomogener Gleichungssysteme verwenden wir folgende Äquivalenz:

$$Ax=b\Leftrightarrow (A|b)\cdot\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$(A|b):=\begin{array}{cccc} A_{11} & \ldots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} & b_m\end{array}$$

denn $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}\cdot x_j=b_i\Leftrightarrow A_{i1}x_1+\ldots+A_{in}\cdot x_n+b_i\cdot(-1)=0$

Gaußscher Algorithmus

$$Ax=b$$

1. Bringe die erweiterte Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform.
2. Wenn die letzte Spalte einen Zeilenführer enthält, ist das Gleichungssystem unlösbar. Dann stopp. Andernfalls kann man eine Lösung v anhand der Zeilenstufenform ausrechnen.
3. Es sei $\{j_1,\dots,j_{s-r}\}$ die Menge der Indizes von Spalten von A, die keinen Zeilenführer enthalten. Dann kann zu jedem $k\in\{1,\dots,s-r\}$ ein Spaltenvektor $c^k:=(c_1^k,\dots,c_s^k)^t\in\mathbb{K}^S$ bestimmt werden mit $c_{j_l}^k=0$ für $l\neq k$ und $c_{j_l}^k=1$ für $l=k$, der im Kern von A liegt (also $Ac^k=0$ erfüllt). Dies geschieht leicht mit Hilfe der reduzierten Zeilenstufenform der Matrix A. Diese Vektoren bilden eine Basis des Kerns von A.

4. Die Lösungsmenge ist dann

$$\{v+\lambda_1 c^1+\dots\lambda_{s-r}c^{s-r}|\lambda_1,\dots,\lambda_{s-r}\in\mathbb{K}\}$$

Der Lösungsraum zu $Ax=b$ ist $l_A^{-1}(b)=\{x\in K^E|Ax=b\}$. Für $v\in K^E$ mit $Av=b$ ist $l_A^{-1}(b)=v+l_A^{-1}(0)$.
Wegen

$$Ax=b\Leftrightarrow (A|b)\begin{pmatrix} x\\ -1\end{pmatrix}=Ax-b=\vec{0}$$

ist $l_A^{-1}(b)=\{x\in K^E|(A|b)\begin{pmatrix} x\\ -1\end{pmatrix}=\vec{0}\}=\{x\in K^E|c\cdot(A|b)\begin{pmatrix} x\\ -1\end{pmatrix}=0\}$ für invertierbares $C\in K^{P\times P}$.

5.6 Beipspiel: „Lösen eines inhomogenen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.“

Unser Ziel ist es, sämtliche Lösungen in den reellen Variablen x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 für das folgende inhomogene Gleichungssystem zu finden:

$$\begin{aligned} x_1+3x_3+x_4-x_5 &= 2\\ 2x_1+6x_3+x_4+3x_5+3x_6 &= 3\\ 3x_1+9x_3+2x_4+2x_5+x_6 &= 5\\ 2x_1+6x_3+8x_5+3x_6 &= 2\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Bestimmung des reellen affinen Lösungsraums der Matrix:

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&3&1&-1&0\\ 2&0&6&1&3&3\\ 3&0&9&2&2&1\\ 2&0&6&0&8&3\end{pmatrix}$$

zum Vektor $b=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\2\end{pmatrix}$, d.h. gesucht ist $l_A^{-1}(b)=\{x\in\mathbb{R}^6|Ax=b\}$.

Anwendung elementare Zeilenoperationen auf $(A|b)$:

$$\begin{array}{c} I\\ II\\ III\\ IV\end{array}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&1&-1&0&2\\ 2&0&6&1&3&3&3\\ 3&0&9&2&2&1&5\\ 2&0&6&0&8&3&2\end{array}\right)\underbrace{\to}_{II-IV}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&1&-1&0&2\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 3&0&9&2&2&1&5\\ 2&0&6&0&8&3&2\end{array}\right)\underbrace{\to}_{I-II}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&0&4&0&1\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 3&0&9&2&2&1&5\\ 2&0&6&0&8&3&2\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\to}_{III-3I}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&0&4&0&1\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 0&0&0&2&-10&1&2\\ 2&0&6&0&0&3&2\end{array}\right)\underbrace{\to}_{IV-2I}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&0&4&0&1\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 0&0&0&2&-10&1&2\\ 0&0&0&0&0&3&0\end{array}\right)\underbrace{\to}_{III-2I}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&0&4&0&1\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&3&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\to}_{IV-3III}\underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&3&0&4&0&1\\ 0&0&0&1&-5&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)}_{red.Zeilenstufenform}$$

Bestimmung <u>einer</u> Lösung von $l_A^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^6 | c \cdot (A|b) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}\}$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 + 4x_5 - 1 & = & 0 \\ x_4 - 5x_5 - 1 & = & 0 \\ x_6 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

D.h.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - 3x_3 - 4x_5 \\ x_4 & = & 1 + 5x_5 \\ x_6 & = & 0 \end{array}$$

Man setze $x_3 = x_5 = 0$ dann ist $x_1 = 1$ und $x_4 = 1$, d.h. $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in l_A^{-1}(b)$.

Wegen $l_A^{-1}(b) = v + l_A^{-1}(0)$ genügt es nun $l_A^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^6 | Ax = 0\}$ zu bestimmen, d.h. man bestimme alle Lösungen von:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 + 4x_5 & = & 0 \\ x_4 - 5x_5 & = & 0 \\ x_6 & = & 0 \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_3 - 4x_5 \\ x4 & = & 5x_5 \\ x_6 & = & 0 \end{array}$$

d.h.

$$l_A^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ 5x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} | x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_A^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^6 | Ax = b\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kapitel 6

Affine Abbildungen

6.1 Definition

Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$. Die Elemente aus $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ haben zwei Interpretationen: algebraisch betrachtet sind es Vektoren und geometrisch betrachtet sind es Punkte (im Raum).
In diesem Sinne interpretieren wir $p, q, r, s \in V$ nachfolgend als Punkte.

- Der Vektor von p nach q ist durch $\overrightarrow{pq} := q - p$ gegeben; offensichtlich gilt dann $p + \overrightarrow{pq} = q$. (Der Punkt p lässt sich dann als Vektor von **0** nach p auffassen, da $\overrightarrow{0p} = p - 0 = p$.) Ferner heißt das Punktequadrupel $(p, q|r, s)$ ein Parallelogramm in $\mathbb{V}$, falls $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ (d.h. $q - p = s - r$) gilt; es ist dann auch $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$ (da aus $q - p = s - r$ stets $r - p = s - q$ folgt).

- Gilt $\overrightarrow{pr} = \lambda\overrightarrow{pq}$ für $\lambda \in K$, so heißt λ Teilverhältnis von $\overrightarrow{pr}$ zu $\overrightarrow{pq}$.

- Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt affine Abbildung von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$, falls sie Parallelogramme und Teilverhältnisse „respektiert“, d.h. mit $(p, q|r, s)$ ist stets auch $(f(p), f(q)|f(r), f(s))$ ein Parallelogramm (d.h. aus $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ folgt $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(r)f(s)}$) und aus $\overrightarrow{pq} = \lambda\overrightarrow{pq}$ folgt stets $\overrightarrow{f(p)f(r)} = \lambda\overrightarrow{f(p)f(q)}$.

Anmerkung

Eine Abbildung $f : V \to W$ ist affin genau dann, wenn aus $\overrightarrow{pq} = \lambda\overrightarrow{rs}$ stets auch $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \lambda\overrightarrow{f(r)f(s)}$ folgt. D.h. aus $q = p + \overrightarrow{pq} = p + \lambda\overrightarrow{rs}$ folgt $f(q) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} = f(p) + \lambda\overrightarrow{f(r)f(s)}$, und dies bedeutet:

$$f(p + \lambda\overrightarrow{rs}) = f(p) + \lambda\overrightarrow{f(r)f(s)}$$

für alle $p, r, s \in V$ und $\lambda \in K$.

6.2 Proposition

Sei $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume.

- Ein Abbildung $f : V \to W$ ist affin genau dann, wenn die Abbildung $g : V \to W, x \mapsto \overrightarrow{f(0)f(x)} = f(x) - f(0)$ $\mathbb{K}$-linear ist.

- Die Verkettung affiner Abbildungen ist wieder affin: Ist f affine Abbildung von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{V}$ und ist h affine Abbildung von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$, so ist auch $h \circ f$ affine Abbildung von $\mathbb{U}$ nach $\mathbb{W}$.

- Für jedes $v \in V$ ist die Translationsabbildung (kurz Translation) $\tau_v : V \to V, x \mapsto x + v$ eine affine Abbildung von $\mathbb{V}$ in sich.

- Jede affine Abbildung ist Verkettung einer linearen Abbildung mit einer Translationsabbildung: Ist $f : V \to W$ affine Abbildung, so gilt für die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g : V \to W, x \mapsto \overrightarrow{f(0)f(x)}$ stets $f = \tau_{f(0)} \circ g$.
- Es bezeichne $T(\mathbb{V})$ die Menge der Translationsabbildungen von $\mathbb{V}$. Dann ist die Zuordnung

$$V \to T(\mathbb{V}), v \mapsto \tau_v$$

ein Isomorphismus von der Gruppe $(V, +, 0)$ nach $(T(\mathbb{V}), \circ, id_V)$.
Für alle $p, q, r \in V$ ist außerdem $\tau_{\overrightarrow{pq}}(p) = q$ und $\tau_{\overrightarrow{qr}} \circ \tau_{\overrightarrow{pq}} = \tau_{\overrightarrow{pr}}$ und $\tau_{\overrightarrow{pq}}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{qp}}$.

- Die Abbildung $\sigma_p^\lambda : V \to V, x \mapsto p + \lambda\overrightarrow{px}$ heißt λ-Streckung im Punkt p (wobei $\lambda \in K$ und $p \in V$).
„Verlagerung" einer λ Streckung: Es gilt für $p, q \in V$ stets

$$\sigma_q^\lambda = \tau_{\overrightarrow{pq}} \circ \sigma_p^\lambda \circ \tau_{\overrightarrow{qp}}$$

$$\sigma_q^\lambda(x) = q + \lambda(x - q)$$

$$\tau_{\overrightarrow{pq}}(\sigma_p^\lambda(\tau_{\overrightarrow{qp}}(x)))$$

6.3 Proposition: „Darstellung affiner Abbildungen"

Seien P, E endl. nichtleere Mengen und sei $\mathbb{K}$ Körper. Für eine Abbildung $f : K^P \to K^E$ gilt dann: f ist affine Abbildung von $\mathbb{K}^P$ nach $\mathbb{K}^E$ genau dann, wenn es eine Matrix $A \in K^{E\times P}$ und ein $b \in K^E$ gibt, mit $f : K^P \to K^E, x \mapsto Ax + b$.

Beweis

„$\Rightarrow$" Setze $A_{(i,j)} := (f(\delta_j^P) - f(0))(i)$ mit $i \in E$ und $j \in P$ und $b := f(0)$.
„$\Leftarrow$" $g : K^P \to K^E, x \mapsto f(x) - f(0)$ ist linear, da $g(x) = f(x) - f(0) = A(x)$ (da $f(0) = b$), d.h. $g = l_A$.

qed

Kapitel 7

Multilineare Abbildungen

7.1 Definition

Seien $\mathbb{V}_1, \cdots, \mathbb{V}_n$ und $\mathbb{W}$ gegebene $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ heißt multilinear, falls f in jeder Komponente $\mathbb{K}$-linear ist, d.h. für jedes $i \in \{1, \cdots, n\}$ und beliebige $v_j \in V_j$ (mit $j \neq i$) ist die Abbildung $g : V_i \to W, x \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \cdots, v_n)$ $\mathbb{K}$-linear.

Wichtige Spezialfälle

- Ist $\mathbb{W} = \mathbb{K}$, so nennen wir f auch Multilinearform.
- Ist $n = 2$, so heißt f bilinear. Wir sagen, dass $v_1 \in V_1$ f-orthogonal zu $v_2 \in V_2$, falls $f(v_1, v_2) = 0$ gilt; Kurzbezeichung: $v_1 \perp_f v_2$. Ist zusätzlich $\mathbb{W} = \mathbb{K}$, so heißt f Bilinearform.
- f heißt alternierend, falls $f(v_1, \cdots, v_n) = 0$ wenn immer es $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ gibt. (Hier: $\mathbb{V} = \mathbb{V}_i$ für alle i)
  f nennen wir Determinatenform, falls f alternierende Multilinearform ist. Ist $\mathbb{V}_i = \mathbb{K}^n$ (für $i = 1, \cdots, n$), so heißt $f : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Determinatenabbildung (der Ordnung n über $\mathbb{K}$), falls f Determinantenform mit $f(\delta_1, \cdots, \delta_n) = 1$ (wobei $((\delta_i)_{i=1,\cdots,n}$ Standardbasis von $\mathbb{K}^n$). Wir setzen dann $det := f$ und nennen $det(v_1, \cdots, v_n)$ die Determinate von $v_1, \cdots, v_n \in K^n$. Fernen sei $detA := det(A(1, \bullet), \cdots, A(n, \bullet))$ für alle $A \in K^{n \times n}$.

7.2 Proposition

- Sei $\beta : U \times V \to W, (u, v) \mapsto uv$ eine bilineare Abbildung ($\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-Vektorräume). Dann gilt

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda_1 \mu_1 u_1 v_1 + \lambda_1 \mu_2 u_1 v_2 + \lambda_2 \mu_1 u_2 v_1 + \lambda_2 \mu_2 u_2 v_2$$

  für alle $\lambda_i, \mu_i \in K$ und $v_i \in V$ und $u_i \in U$ $(i = 1, 2)$.

- Eine Abbildung $\beta : K^P \times K^E \to K$ ist eine Bilinearform genau dann, wenn es eine Matrix $B \in K^{P \times E}$ gibt mit $\beta : K^P \times K^E \to K, (u, v) \mapsto uBv$
  Beweis:
  „$\Rightarrow$“ $B(i, j) := \beta(\delta_i^P, \delta_j^E)$ für alle $i \in P$ und $j \in E$
  Spezialfall
  $B = I_P$ und $E = P$, d.h. $\beta : K^P \times K^P \to K, (u, v) \mapsto uI_p v = \sum_{i \in P} u_i v_i$. Wir nennen dann β das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^P$ und setzen $< u|v >:= \beta(u, v) = \sum_{i \in P} u_i v_i$. Im Fall

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt β auch das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^P$; es heißt $\perp := \perp_\beta$ die euklidische Orthogonalitätsrelation auf $\mathbb{R}^P$.
Es gilt also $u \perp v$ (u orthogonal zu v) genau dann, wenn $< u|v >= 0$, d.h. $u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = 0$. (Triviales Bsp: $(1,0) \perp (0,1)$ da $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, oder auch $(1,2) \perp (-2,1)$ da $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$)
Beobachtung:
Seien $A \in K^{P \times P}$ und $u, v \in K^P$. Dann ist $< uA|v >= (uA)I_Pv = uAv = uI_p(Av) =< u|Av >$.

- Sei $\beta : V \times V \to W$ alternierende Bilinearform (d.h. β ist Determinatenform). Dann gilt $\beta(u,v) = -\beta(v,u)$ für alle $u, v \in V$.
  Denn: $\underbrace{\beta(u+v,u+v)}_{=0 \text{ da } \beta \text{ alternierend}} = \underbrace{\beta(u,u)}_{=0} + \beta(u,v) + \beta(v,u) + \underbrace{\beta(v,v)}_{=0}$.
  Fall: $V = K^2$ und $\beta := det$.

  Dann ist
  $$\begin{aligned} det(\delta_1,\delta_2) &= 1 \\ det(\delta_2,\delta_1) &= -det(\delta_1,\delta_2) = -1 \\ det(\delta_1,\delta_1) &= 0 \\ det(\delta_2,\delta_2) &= 0 \end{aligned}$$
  d.h. $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $det(u,v) = uBv = u_1v_2 - u_2v_1$
  d.h. $det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$
  $((u_1,u_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-u_2, u_1) \qquad uBv = (-u_2,u_1) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 & v_1 \\ u_1 & v_2 \end{pmatrix})$

- Ist $\beta : V \times V \to K$ Bilinearform, so heißt $q_\beta : V \to K, v \mapsto \beta(v,v)$ die zu β gehörige quadratische Form.

  Beispiel: $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (r,s) \mapsto r \cdot s$; dann ist $q_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto r^2$

  Für $\lambda \in K$ heißt $q_\beta^{-1}(\lambda) = \{v \in V | \beta(v,v) = \lambda\}$ eine Quadrik. (nicht mehr linear).
  Ist $\beta : K^n \times K^n \to K, (v,w) \mapsto vBw$ für $B \in K^{n \times n}$, so ist für $q_B : K^n \to K, v \mapsto vBv = \sum_{i,j} v_ib_{ij}v_j = \sum_{i,j} b_{ij}v_iv_j$.
  Beispiel einer reellen Quatrik:
  $$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ((x_i)_{i=1,\ldots,n}, (y_i)_{i=1,\ldots,n}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_iy_i$$
  d.h. $\beta(x,y) :=< x,y >:= \sum_{i=1}^n x_iy_i$ ist Standard Skalarprodukt.
  Hier ist $q_\beta^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ ($n = 2 \Rightarrow$ Einheitskreis)

  Veranschaulichung für $P = \{1,2\}$
  $< (x_1,x_2|(y_1,y_2) >^2 \leq < (x_1,x_2)|(x_1,x_2) > \cdot < (y_1,y_2)|(y_1,y_2) >$
  d.h. $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2)$

7.3 Proposition: „Symetrische reelle Bilinearformen“

Sei $\beta : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform (mit P endliche Menge), die symmetrisch sei, d.h. $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ für alle $u,v \in \mathbb{R}^P$, und die positiv definit sei, $\beta(u,u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^P$ mit $u \neq \vec{0}$. Dann gilt $\beta(u,v)^2 \leq \beta(u,u) \cdot \beta(v,v)$ für alle $u,v \in \mathbb{R}^P$.(Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

Beweis „mit kleinem Trick“

Vorbereitung: Seien $u,v \in \mathbb{R}^P$ mit $u \neq \vec{0}$.
Für $\lambda := \beta(u,v)$ und $\mu := \beta(u,u) > 0$ ist dann
$0 \leq \beta(\lambda u - \mu v, \lambda u - \mu v) = \underbrace{\lambda^2 \underbrace{\beta(u,u)}_{\mu} - 2\lambda\mu \underbrace{\beta(u,v)}_{\lambda}}_{-\lambda^2\mu} + \mu^2\beta(v,v)$
Division der Ungleichung durch $\mu > 0$ ergibt
$0 \leq -\lambda^2 + \mu\beta(v,v) = -\beta(u,v)^2 + \beta(u,u) \cdot \beta(v,v)$
$\Rightarrow \beta(u,v)^2 \leq \beta(u,u)\beta(v,v)$.

qed

7.4 Proposition: Reelle Normen

Sei $\beta : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \mapsto \mathbb{R}$ eine positiv, definite, symetrische Bilinearform, z.B $\beta(x,y) =< x|y >$ das euklidische Skalarprodukt (d.h. $< x,y >=< x_1y_1 + \ldots + x_ny_n >$) für $P = \{1,\ldots,n\}$. Dann heißt $\|x\|_\beta : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}, x \mapsto \beta(x,x)^{\frac{1}{2}}$ die zu β gehörige Norm-Funktion. Es gilt:

1. $\|x\|_\beta > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^P$ mit $x \neq \vec{0}$
2. $\|x\|_\beta = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^P$
3. $\|\lambda x\|_\beta = |\lambda| \cdot \|x\|_\beta$ für alle $x \in \mathbb{R}^P$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\|_\beta \leq \|x\|_\beta + \|y\|_\beta$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^P$

Beweis zu 4.: Es ist

- $\|x + y\|^2 = \|x\|_\beta^2 + 2\beta(x,y) + \|y\|_\beta^2 = (\|x\|_\beta + \|y\|_\beta)^2$
- $((\|x\|)_\beta + (\|y\|))_\beta^2 = \|x\|_\beta^2 + 2(\|x\|)_\beta(\|y\|)_\beta + \|y\|_\beta^2$

Mit Proposition 7.3 ist $|\beta(x,y)| \leq \|x\|_\beta\|y\|_\beta$

qed

7.5 Reelle Abstandsfunktionen und euklidischer Abstand

Sei $\beta : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \mapsto \mathbb{R}$ eine positiv, definite, symmetrische Bilinearform. Dann heißt $d_\beta : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|x - y\|_\beta = \beta(x - y, x - y)^{\frac{1}{2}}$ die zu β gehörige Abstandsfunktion (bzw. Metrik). Es gilt:

1. $d_\beta(x,y) > 0$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^P$ mit $x \neq y$ und $d_\beta(x,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^P$
2. $d_\beta(x,y) = d_\beta(y,x)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^P$
3. Dreiecksungleichung: $d_\beta(x,z) \leq d_\beta(x,y) + d_\beta(y,z)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^P$

Beweis zu 3: Nach Proposition 7.4 gilt $x, y, z \in \mathbb{R}^P$ stets:

$$d_\beta(x,z) = \|x-z\|_\beta = \| \underbrace{(x-y)+(y-z)}_{x-z} \|_\beta \leq \|x-y\|_\beta + \|y-z\|_\beta = d_\beta(x,y) + d_\beta(y,z)$$

qed

Anmerkung

Zum euklidischen Skalarprodukt $< \bullet | \bullet >: \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}$ gehört die euklidische Normfunktion

$$\| \bullet \| : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}, x \mapsto (\sum_{i \in P} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

und die euklitische Abstandsfunktion

$$d : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (\sum_{i \in P} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist $cos(\alpha) := \frac{<x|y>}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1,1]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^P$.

7.6 Alternierende Multilinearformen und Determinaten (Fortsetzung)

Seien $\mathbb{K}^n$ n-dim Standard-Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

1. Sind f und g alternierende Multilinearformen von $\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = g(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, so ist $f = g$.
   <u>Begründung:</u> $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ falls $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und es $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ gibt. Es is daher $f(v_1, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{i-te\ Stelle}, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{j-te\ Stelle}, \ldots, v_n) = 0$
   $= \underbrace{f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n)}_{0} + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \underbrace{f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)}_{0}$
   Also ist $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.
   Konsquenz: $f(v_{\alpha 1}, \ldots, v_{\alpha n}) = sgn(\alpha) \cdot f(v_1, \ldots, v_n)$ für alle Bijektionen $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ (Permutation), wobei $sgn(\alpha) = 1$ falls α eine Komposition einer geraden Anzahl von Transpositionen auf $\{1, \ldots, n\}$ ist. (Wobei eine Transposition genau zwei Elemente vertauscht und alle anderen fest lässt.) Andernfalls ist $sgn(\alpha) = -1$. (d.h. α ist Komposition einer <u>ungeraden</u> Anzahl von Transpositionen)

2. Ist $d : K^n \times \ldots \times K^n \to K$ alternierende Multilinearform mit $d(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1$, so ist bereits $d = det$.

3. Es ist $det(A) := det(A(1, \bullet), \ldots, A(n, \bullet)) = det(A(\bullet, 1), \ldots, A(\bullet, n))$ für alle $A \in K^{n \times n}$.

4. Ferner ist $det(A) = \sum_{\alpha \in S_n} (sgn(\alpha)) \prod_{i=1}^{n} A(i, \alpha(i))$
   (S_n Menge aller Permutaionen auf $\{1, \ldots, n\}$)

5. Es gilt $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.
   Denn: $B = (b_1, \ldots, b_n)$, dann ist $AB = (Ab_1, \ldots, Ab_n).(b_j = B(\bullet, j))$
   Es folgt $det(AB) = det(Ab_1, \ldots, Ab_n) = det(A) \cdot det(b_1, \ldots, b_n) = det(A) \cdot det(B)$ da für $g : K^n \times \ldots \times K^n, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto det(Av_1, \ldots, Av_n)/det(A)$ (wobei $det(A) \neq 0$ sei) gilt:
   $$g(\delta_1, \ldots, \delta_n) = det(\underbrace{A\delta_1, \ldots, A\delta_n}_{A})/det(A) = 1$$
   d.h. $g = det$. Also ist $det(v_1, \ldots, v_n) = det(Av_1, \ldots, Av_n)/det(A)$.

   qed

6. aus $Ax = b \Rightarrow x_i = det(A(\bullet, 1), \ldots, \underbrace{b}_{i-te\ Stelle}, \ldots, A(\bullet, n))$

7. A ist invertierbar $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
   Begründung „$\Rightarrow$“ Nach Verausetzung hat A ein Inverses $B \in K^{n \times n}$, d.h es ist $A \cdot B = I_n$. Wegen Punkt 3 ist dann $det(A) \cdot det(B) = det(I_n) = 1$ und es folgt $det(A) \neq 0$.
   „$\Leftarrow$“ Sei $det(A) \neq 0$. Definiere $B \in K^{n \times n}$ durch
   $B(i, j) := \frac{1}{det(A)} \cdot det(A(\bullet, 1), \ldots, A(\bullet, i - 1), \delta_j, \ldots, A(\bullet, i + 1), \ldots, A(\bullet, n))$.
   Dann ist $(B \cdot A)(i, j) = \sum\limits_{h=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{det(A)} \cdot det(A(\bullet, 1), \ldots, \underbrace{\delta_h}_{\text{i-te Stelle}}, \ldots, A(\bullet, n))}_{B(i,h)} \cdot A(h, j) =$
   $\frac{1}{det(A)} \cdot det(A(\bullet, 1), \ldots, \sum\limits_{h=1}^{n} A(h, j)\delta_h, \ldots, A(\bullet, n)) = I_n(i, j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
   Ergebnis $B \cdot A = I_n$, und daher ist A invertierbar vermöge B.

8. Für eine lineare Abbildung $f : K^n \to K^n$ gilt:
   f ist bijektiv, d.h. f ist Automorphismus
   $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv, d.h. $f$ist Epimorphismus
   $\Leftrightarrow f$ ist injektiv, d.h. f ist Monomorphismus $\Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$ („trivialer Kern“)

9. Für eine Matix $A \in K^{n \times n}$ heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von $l_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$, falls es ein $v \in K^n$ mit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$ gibt, v heißt dann Eigenvektor von l_A. Es gilt: $det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert von l_A.
   Begründung mit letzten beiden Punkten: $det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda I_n - A$ nicht invertierbar $\Leftrightarrow l^{-1}(0) \neq \{0\}$, d.h. $\exists v \in K^n \setminus \{0\} : (\lambda I_n - A)v = 0$, d.h. $l_{\lambda I_n - A}$ nicht bijektiv, d.h. $Av = \lambda v$.

   q.e.d.

10. Für $A \in K^{n \times n}$ und eine Variable $x \in K$ ist das sogenannte charakteristische Polynom von A gegeben durch $\chi_A(x) := det(x \cdot I_n - A)$. Es gibt $c_i \in K (i = 0, \ldots, n)$ mit $\chi_A(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$
    wobei $c_n = 1, c_{n-1} = -\sum\limits_{i=1}^{n} A(i, i) = -tr(A), c_0 = (-1)^n \cdot det(A)$
    Spezialfall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und n ungerade; dann hat $\chi_A(x)$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$. Da die Nullstelle von $\chi_A(x)$ genau die Eigenwerte von l_A sind, existiert also zu l_A mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mit n ungerade, stets ein Eigenwert und also auch ein Eigenvektor.

Kapitel 8

Euklidische Vektorräume

8.1 Definition

Der $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem euklidischen Skalaprodukt $< \bullet|\bullet >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ heißt der euklidische (Stndard-) Vektorraum der Dimension n. Es ist also $< x|y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.
Die Abbildung $\| \bullet \| = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto < x|x >^{\frac{1}{2}}$ heißt euklidische Norm. Es ist also $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Die euklidische Metrik (bzw. die euklidische Abstandsfunktion) ist gegeben durch $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \|x - y\|$. Es ist also $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen (euklidisch) orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, falls $< x|y >= 0$ gilt. Der (euklidische) Winkel zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist durch das Bogenmaß $\angle(x, y) = \alpha \in [0, \Pi]$ mit $cos\alpha = \frac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|}$ gegen.

8.2 Bemerkung

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $< x|y >^2 \leq < x|x > \cdot < y|y >$ „CSU“ - Cauchy - Schwarz’sche Ungleichung
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecksungleichung

8.3 Definition

Ein Familie von Vektoren $v_1, \cdots , v_n \in \mathbb{R}^n$ heißt Orthonormalbasis (Einheitsphäre) von $(\mathbb{R}^n, < | >)$, falls $< v_i|v_j >= \delta_{i,j}$ (wobei $\delta_{i,j} := \delta_i(j)$) für alle $i, j \in \{1, \ldots , n\}$ gilt; d.h. es ist $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ und $\|v_i\| = d(0, v_i) = 1$ für alle i.
Beispiel: Standardbasis $\delta_1, \ldots , \delta_n \in \mathbb{R}^n$
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Orthonormal-Matrix, falls $A(\bullet, 1), \cdots , A(\bullet, n)$ eine Orthonormalbasis bilden. D.h. $AA^T = I_n$.
Also liegen x und y auf der Einheitssphäre des n-dimentionalen euklidischen Raumes, so ist $cos\angle(x, y) =< x|y >$.

8.4 Proposition: „Algebraische Darstellung von Bewegungen“

Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1. f ist eine euklidische Bewegung, d.h. es gilt $d(fx, fy) = d(x, y)$ für alle $x, y, \in \mathbb{R}^n$
2. Es gibt Orthonormalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b$

8.5 Gram-Schmidtsche Orthonormalisierung im n-dim. Raum $(\mathbb{R}^n, <\mid>)$

- Gegeben sei eine Basis $u_1, \ldots, u_n$ des $\mathbb{R}^n$. $w_1 := u_1$
- Normalisierung: $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ (dann ist $\|v_1\| = \|\frac{u_1}{\|u_1\|}\| = \frac{1}{\|u_1\|}\|u_i\| = 1$).
- Orthonormalisierung: $w_2 := u_2 - < u_2|v_1 > v_1$.
  Dann ist $v_1 \perp w_2$ wegen $< v_1|w_2 >=< v_1|u_2 > - < u_2|v_1 > \underbrace{< v_1|v_1 >}_{1} = 0$
- Normalisierung: $v_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|}$ dann ist $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ und $v_1 \perp v_2$ (da $v_1 \perp w_2$)

$$\vdots$$

- Orthonormalisierung: $w_r := u_r - < u_r|v_1 > v_1 - \ldots - < u_r|v_{r-1} > v_{r-1}$.
- Normalisierung: $v_r := \frac{w_r}{\|w_r\|}$.

Beispiel

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$h = g \circ f \Rightarrow h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (Fixachse von } h\text{)}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \delta_1, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einfach oben einsetzen: $\|w_1\| = \sqrt{3}$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$